# Теория систем и системный анализ. Работа 2. Шкалы. Классификация.

**Задание 1. Шкалы**

1. Определить тип шкалы (номинальная, ранговая, интервальная и или отношений.
2. Выполнить допустимые действия:

Номинальная – построить матрицу Кронекера (или её усечённый вариант), рассчитать частоты, найти моды.

Порядковая – записать ранги по убыванию/возрастанию, найти медиану.

Отношений – найти среднее арифметическое, моду, проверить выборку на симметричность.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Объект** | **Назначение** | **Популярность** | **Доступность (платная, беспл.)** | **Легкость установки** | **Сколько занимает места на диске (Гб)** | **Цена (руб.)** |
| Microsoft Windows | для ПК | 1 | платная | 1 | 20 | 23 000 |
| Android | мобильная ОС | 4 | беспланая | 3 | 13 | 0.00 |
| Linux | для ПК | 3 | беспланая | 2 | 8 | 0.00 |
| iOS | мобильная ОС | 5 | платная | 5 | 10 | 9 000.00 |
| macOS | для ПК | 2 | платная | 4 | 35 | 37 000.00 |
| Номинальная | Номинальная | Ранговая | Номинальная | Ранговая | Отношений | Отношений |

Обработка результатов измерения:

1. Номинальная шкала

Матрица Кронекера (её усечённый вариант в формате δномер строки – номер столбца)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Свойство** | **Символ Кронекера** | | | | | | | | |
| δ 1-2 | δ 1-3 | δ 1-4 | δ 1-5 | δ 2-3 | δ 2-4 | δ 2-5 | δ 3-4 | δ 3-5 |
| **Назначение** | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| **Доступность (платн./беспл.)** | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

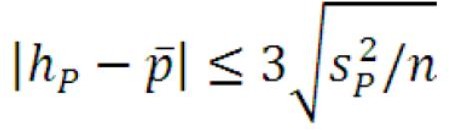
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Свойство** | **Частоты** | **Мода** |
| **Назначение** | A1=A3=A5= 3/5, A2=A4=2/5 | класс "для ПК" |
| **Доступность (платн./беспл.)** | A1=A4=A5= 3/5, A2=A3=2/5 | класс "платная" |

1. Ранговая шкала

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Объект** | **Наименование** | **Популярность** | **Легкость установки** |
| A1 | Microsoft Windows | 1 | 1 |
| A2 | Android | 4 | 3 |
| A3 | Linux | 3 | 2 |
| A4 | iOS | 5 | 5 |
| A5 | macOS | 2 | 4 |
| **Ранги** | | **A1>A5>A3>A2>A4** | **A1>A3>A2>A5>A5** |
| **Медиана** | | **медиана - 3** | **медиана - 3** |

1. Шкала отношений

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Объект** | **Наименование** | **Скорость загрузки (сек)** | **Сколько занимает места на диске**  **(Гб)** | **Цена (руб.)** |
| A1 | Microsoft Windowsт10 | 25 | 20 | 23 000 |
| A2 | Android | 9 | 13 | 0.00 |
| A3 | Linux | 12 | 8 | 0.00 |
| A4 | IOS | 7 | 10 | 9 000.00 |
| A5 | MaCos | 30 | 35 | 37 000.00 |
|  | среднее | 16.6 | 17.2 |  |
|  | медиана | 12 | 13 |  |
|  | СКО | 9.18 | 9.79 |  |
|  | среднее минус медиана | 4.60 | 4.20 | меньше, чем 3 СКО - выборки симметричны относительно обоих параметров |

Выборка симметрична, если выполняется условие: разность медианы и среднего арифметического меньше, чем 3\*СКО (среднеквадратичное отклонение):

. Формула СКО:

Где hp – медиана, *p* – среднее, sp – сумма разностей значений выборки от среднего

 *pi*  *p* .

*i*

Проверяем по симметричность по критерию «Скорость…»:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 8.4 | 70.56 |  |  |  |
| 7.6 | 57.76 |  |  |  |
| 4.6 | 21.16 |  |  |  |
| 9.6 | 92.16 |  |  |  |
| 13.4 | 179.56 | 421.2 | 84.24 | 9.18 |
| разность | разность в квадрате | сумма | среднее | из под корня |

4.6 < 9.17 \*3 – по этому параметру выборка симметрична.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 2.8 | 7.84 |  |  |  |
| 4.2 | 17.64 |  |  |  |
| 9.2 | 84.64 |  |  |  |
| 7.2 | 51.84 |  |  |  |
| 17.8 | 316.84 | 478.8 | 95.76 | 9.79 |
| разность | разность в квадрате | сумма | среднее | из под корня |

4.2 < 9.79 \*3 – по этому параметру выборка симметрична

Часть 2. **Интеграция (свёртка) измерений**

Дома: Реализовать на языке программирования (Python / C# / C++ или др.) или в Mathcad / Matlab / Excel:

**Задание 1.** Обобщить оценки альтернатив (объектов) по разным критериям:

а) аддитивная свёртка (а.1 - критерии равнозначны, а.2 - веса критериев wi заданы), б) мультипликативная свёртка (б.1 - критерии равнозначны, б.2 - веса критериев wi

заданы),

в) метод идеальной точки (в.1 - критерии равнозначны, в.2 - веса критериев wi выбрать так, чтобы Σwi=1).

Указать, какая из альтернатив наиболее предпочтительна согласно каждому методу свёртки.

Методы интеграции измерений (свертки).

Имеется конечное число объектов *X* = {*x*1, …, *xn*}, сравниваемых по множеству частных признаков (критериев) *q*1, …, *qm*. Для каждого объекта определены значения частных критериев: *q*1(*x*), …, *qm*(*x*), i 1,n . Это могут быть как экспертные оценки (в случае групповой экспертизы используются обобщенные оценки), так и результаты объективных измерений. Необходимо определить интегральные оценки объектов *q*’(*xi*), i 1,n. Оценки по интегральному критерию зависят от значений частных критериев, т. е. являются их функцией: *q’*(*x*) = *f*(*q*1(*x*), …, *qm*(*x*)), i 1,*n*.

В случае если частные критерии имеют различную размерность (измеряются в различных шкалах), предварительно необходимо нормировать значения частных критериев, т. е. привести их к одному масштабу. Большинство способов свертки предполагают, что значения должны быть представлены в шкале, по типу являющейся шкалой отношений. Для нормирования абсолютные «натуральные» значения критериев переводятся в относительные безразмерные значения. Чаще всего используется отношение абсолютного значения критерия *q ab*(*x* ) к некоторому значению *q et* измеренному в тех же единицах

*j i j*

(1)

Например, чтобы нормировать рост человека, измеренный в метрах, можно поделить его на нормирующий показатель, равный максимальному росту (допустим, 2.5 м). Тогда росту 1.5 м будет соответствовать нормированное значение 0.6, росту 1.8 м – 0.72.

В качестве нормирующего значения может выступать сумма нормируемых значений по всем сравниваемым объектам. Например, нормирование объемов производства различных цехов предприятия может осуществляться путем вычисления соответствующих долей в общем объеме производства.

В случае, когда **чем меньше значение** критерия, **тем** оно должно **оцениваться выше**, используется отношение разницы между максимальным и абсолютным значением к разнице между минимальным и максимальным значениями:

(2)

где *qjmin, qjmax* – соответственно минимальное и максимальное значения j-го критерия.

Важно: *qjmin* должно быть меньше минимального значения в наборе данных, а *qjmax*

должен быть больше.

Перейдем к рассмотрению собственно методов интеграции измерений. Используется два основных способа – свертка (аддитивная или мультипликативная) частных критериев и метод идеальной точки.

**Аддитивная свертка частных критериев.** Значение интегрального критерия определяется как сумма значений частных критериев, поделенная на количество частных критериев:

(3)

В случае если частные критерии имеют различную важность (вес), вместо формулы среднеарифметического для определения значения интегрального критерия используют средневзвешенное арифметическое:

(4)

где *vj* – вес j-го критерия, отражающий вклад частного критерия в интегральный. Это число в интервале [0, 1]. Причем сумма весовых коэффициентов всех частных критериев должна быть равна 1:



Для определения весовых коэффициентов может быть использован метод непосредственной оценки. Если оценка производится по 5- (10- ,100- ...) балльной шкале, то для нормирования можно использовать отношение к сумме баллов по всем критериям.

Иногда используют методы ранжирования. В частности, для определения весов на основе рангов используется формулы:

* если наилучший критерий имеет максимальный ранг (прямой порядок, например, уровень персонажа в компьютерной RPG):

(5)

* или если наилучший критерий имеет ранг 1 (обратный порядок, например, место в соревновании).

(6)

**Мультипликативная свертка частных критериев.** Если частные критерии имеют одинаковый вес, значение интегрального критерия определяется по формуле среднегеометрического

(7)

Если же частные критерии имеют различную важность, то определяется средневзвешенное геометрическое

(8)

Как и в случае аддитивной свертки, сумма весовых коэффициентов должна быть равна 1.

Основным недостатком методов свертки является то, что низкие значения по одним критериям компенсируются высокими значениями по другим. Если же требуется обеспечить равномерное подтягивание всех показателей к наилучшему уровню (к

«идеалу»), то используется метод идеальной точки.

**Метод идеальной точки.** Прежде всего, необходимо задать идеальную точку x0, т. Е. объект с наилучшими значениями по всем критериям. Для этого по каждому из частных критериев *qj* необходимо определить наилучшее значение *qj*(*x*0). Как правило, *qj*(*x*0) = max *qj*(*xj*). В случае, если значения нормированы в диапазоне [0…1], идеальной точкой будет элемент с оценками 1 по всем критериям.

Значение интегрального критерия для объекта *xi* определяется через евклидовое расстояние между ним и идеальной точкой *x*0 по всем частным критериям:

(9)

# Наилучшим является объект, имеющий минимальное значение критерия.

В случае различной важности частных критериев используется взвешенная сумма расстояний

(10)

Если оценки объектов по частным критериям получены в порядковой (ранговой) шкале измерений, то расстояние между точками *xi* и *x*0 определяется по формулам:



(11, 12)

Первая формула используется, если критерии имеют одинаковый вес, вторая – если разный.

Задачи для решения у доски.

Задача 1. Выбрать наилучший ПК. Данные реальны (моноблоки с DNS) Таблица 1

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Выбор ПК | Частота | Цена | ОЗУ |
| 1 | DEXP AIO-MC | 3.7 | 30 000 | 8 |
| 2 | ASUS V222FAK-WA047M | 2.24 | 44 000 | 4 |
| 3 | MSI PRO AP241 11M-  642XRU | 4.1 | 35 000 | 8 |
| 4 | Acer Veriton Z4880G | 4.1 | 50 000 | 4 |

Задаём max и min для значений (могут быть другие).

Таблица 2

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Выбор ПК | Частота | Цена | ОЗУ |
| 1 | DEXP AIO-MC | 3.7 | 30 000 | 8 |
| 2 | ASUS V222FAK- WA047M | 2.24 | 44 000 | 4 |
| 3 | MSI PRO AP241 11M- 642XRU | 4.1 | 35 000 | 8 |
| 4 | Acer Veriton Z4880G | 4.1 | 50 000 | 4 |
|  | min | 2 | 0 | 2 |
|  | max | 5 | 100 000 | 16 |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Частоту и ОЗУ нормализуем по формуле , цену – по формуле 2. Таблица 3

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Выбор ПК | Частота | Цена | ОЗУ |
| 1 | DEXP AIO-MC | 0.74 | 0.70 | 0.5 |
| 2 | ASUS V222FAK- WA047M | 0.448 | 0.56 | 0.25 |
| 3 | MSI PRO AP241 11M- 642XRU | 0.82 | 0.65 | 0.5 |
| 4 | Acer Veriton Z4880G | 0.82 | 0.50 | 0.25 |

Рассчитаем аддитивную свёртку по формуле 3. Наилучшая оценка подчёркнута. Таблица 4

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Выбор ПК | Частота | Цена | ОЗУ | Аддитивная свёртка  (веса равны) |
| 1 | DEXP AIO-MC | 0.74 | 0.70 | 0.5 | 0.647 |
| 2 | ASUS V222FAK- WA047M | 0.448 | 0.56 | 0.25 | 0.419 |
| 3 | MSI PRO AP241 11M- 642XRU | 0.82 | 0.65 | 0.5 | **0.657** |
| 4 | Acer Veriton Z4880G | 0.82 | 0.50 | 0.25 | 0.523 |

Dexp почти вырвался вперёд 

Рассчитаем мультипликативную свёртку по формуле 5. Наилучшая оценка подчёркнута.

Таблица 5

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Выбор ПК | Частота | Цена | ОЗУ | Мультипликативная свёртка (веса  равны) |
| 1 | DEXP AIO-MC | 0.74 | 0.70 | 0.5 | 0.63743 |
| 2 | ASUS V222FAK- WA047M | 0.448 | 0.56 | 0.25 | 0.39732 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 3 | MSI PRO AP241 11M-  642XRU | 0.82 | 0.65 | 0.5 | **0.64353** |
| 4 | Acer Veriton Z4880G | 0.82 | 0.50 | 0.25 | 0.468 |

Рассчитаем методом идеальной точки по формуле 9. Наилучшая альтернатива (с наименьшим отклонением от идеала) подчёркнута.

Таблица 6

Метод идеальной точки

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Выбор ПК | Частота | Цена | ОЗУ | разность 1 ^2 | разность 2 ^2 | разность 3 ^2 | итог |
| DEXP AIO- MC | 0.74 | 0.70 | 0.5 | 0.0676 | 0.09 | 0.25 | 0.3686 |
| ASUS V222FAK-  WA047M | 0.448 | 0.56 | 0.25 | 0.3047 | 0.1936 | 0.5625 | 0.59464 |
| MSI PRO AP241 11M- 642XRU | 0.82 | 0.65 | 0.5 | 0.0324 | 0.1225 | 0.25 | **0.36738** |
| Acer Veriton Z4880G | 0.82 | 0.50 | 0.25 | 0.0324 | 0.25 | 0.5625 | 0.53069 |

По результатам расчётов мы видим, что наилучшей альтернативой является MSI PRO AP241 11M-642XRU, следом с небольшим отрывом идёт DEXP AIO-MC.

(1-0.74)^2+(1-0.7)^2+(1-0.5)^2=0.0676-0.09-0.25=

Добавим весовые коэффициенты по формуле 5 (можно было по 6). Допустим, мы считаем, что наиболее важный критерий – цена. Затем идут частота и ОЗУ (допустим, что они равны по важности – ранг 1 – с точки зрения математики равнозначно разделение рангов со связанными рангами «1.5–3–1.5» или без связанных рангов «1–2–1»).

Таблица 7

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Критерий | Частота | Цена | ОЗУ |  |
| Ранги | 1 | 2 | 1 | сумма (проверка) |
| Рассчитанный вес | 0.25 | 0.5 | 0.25 | 1 |

Рассчитаем аддитивную свёртку по формуле 4, т.к. заданы весовые коэффициенты.

Наилучшая оценка подчёркнута.

Таблица 8

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | | | | Аддитивная свёртка (веса равны) | | | |
|  | Выбор ПК | Частот а | Цена | ОЗУ | Слагаемое 1 | Слагаемое 2 | Слагаемое 3 | Итог |
| 1 | DEXP AIO-MC | 0.74 | 0.7 | 0.5 | 0.185 | 0.35 | 0.125 | 0.660 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 | ASUS V222FAK-  WA047M | 0.448 | 0.56 | 0.25 | 0.112 | 0.28 | 0.0625 | 0.455 |
| 3 | MSI PRO AP241 11M-  642XRU | 0.82 | 0.65 | 0.5 | 0.205 | 0.325 | 0.125 | 0.655 |
| 4 | Acer Veriton Z4880G | 0.82 | 0.5 | 0.25 | 0.205 | 0.25 | 0.0625 | 0.518 |

Dexp вырвался вперёд!  А MSI незначительно отстаёт. Результат такой потому, что мы считаем стоимость наиболее важным критерием.

Рассчитаем мультипликативную свёртку по формуле 5. Наилучшая оценка подчёркнута.

Таблица 9

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | | | | Мультипликативная свёртка (веса равны) | | | |
|  | Выбор ПК | Частот а | Цена | ОЗУ | Множи тель1 | Множи тель2 | Множи тель3 | Итог |
| 1 | DEXP AIO- MC | 0.74 | 0.7 | 0.5 | 0.927 | 0.837 | 0.841 | **0.653** |
| 2 | ASUS  V222FAK- WA047M | 0.448 | 0.56 | 0.25 | 0.818 | 0.748 | 0.707 | 0.433 |
| 3 | MSI PRO AP241 11M- 642XRU | 0.82 | 0.65 | 0.5 | 0.952 | 0.806 | 0.841 | 0.645 |
| 4 | Acer Veriton Z4880G | 0.82 | 0.5 | 0.25 | 0.952 | 0.707 | 0.707 | 0.476 |

Рассчитаем методом идеальной точки по формуле 9. Наилучшая альтернатива (с наименьшим отклонением от идеала) подчёркнута.

Таблица 10

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | | | | Метод идеальной точки | | | |
|  | Выбор ПК | Частот а | Цена | ОЗУ | разнос ть 1 ^2 | разнос ть 2 ^2 | разнос ть 3 ^2 | итог |
| 1 | DEXP AIO-MC | 0.74 | 0.7 | 0.5 | 0.0169 | 0.0450 | 0.0625 | **0.353** |
| 2 | ASUS V222FAK- WA047M | 0.448 | 0.56 | 0.25 | 0.0762 | 0.0968 | 0.1406 | 0.560 |
| 3 | MSI PRO AP241 11M- 642XRU | 0.82 | 0.65 | 0.5 | 0.0081 | 0.0613 | 0.0625 | 0.363 |
| 4 | Acer Veriton Z4880G | 0.82 | 0.5 | 0.25 | 0.0081 | 0.1250 | 0.1406 | 0.523 |

Далее добавим ещё один параметр, измеряемый по шкале порядка (ранговой). Таблица 11

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Выбор ПК | Частота | Цена | ОЗУ | Качество комплектующих |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | DEXP AIO-MC | 3.7 | 30 000 | 8 | низкое |
| 2 | ASUS V222FAK-  WA047M | 2.24 | 44 000 | 4 | высокое |
| 3 | MSI PRO AP241 11M-  642XRU | 4.1 | 35 000 | 8 | среднее |
| 4 | Acer Veriton Z4880G | 4.1 | 50 000 | 4 | высокое |

Пересмотрим приоритеты при расстановке весовых коэффициентов. В первую очередь сделаем важным качество комплектующих, а затем остальные (как в прошлом примере).

Таблица 12

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Критерий | Частота | Цена | ОЗУ | Комплектующие |  |
| Ранги | 1 | 2 | 1 | 3 | сумма (проверка) |
| Рассчитанный вес | 0.143 | 0.286 | 0.143 | 0.429 | 1 |

Нормализуем ранги аналогично, как только что перевели ранги критериев в веса. Таблица 13

Качество комплектующих

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Выбор ПК | Частота | Цена | ОЗУ | Ненор мализо ванный ранг | Норма лизова нный |
| 1 | DEXP AIO-MC | 0.74 | 0.7 | 0.5 | 1 | 0.111 |
| 2 | ASUS V222FAK-  WA047M | 0.448 | 0.56 | 0.25 | 3 | 0.333 |
| 3 | MSI PRO AP241  11M-642XRU | 0.82 | 0.65 | 0.5 | 2 | 0.222 |
| 4 | Acer Veriton Z4880G | 0.82 | 0.5 | 0.25 | 3 | 0.333 |

Далее рассчитаем по формуле 12 столбец с расстоянием альтернатив и идеальной точки и добавим его к таблице 10.

(!) Важно: формула 12 написана для ненормированных значений. В случае нормированных значений (как у нас) ранг 1, из которого вычитается нормированный ранг альтернативы тоже нужно нормировать (1 / сумма рангов). Численно он будет равен рангу объекта, имеющего ранг (при прямой порядковой шкале), здесь – 0.1111.

Пример расчёта:

для Dexp: =(0.1111 – 0.1111)^2 \* 0.429 = 0

для Asus: =(0.1111 – 0.3333)^2 \* 0.429 = 0.021

для Dexp: =(0.1111 – 0.2222)^2 \* 0.429 = 0.005

для Dexp: =(0.1111 – 0.3333)^2 \* 0.429 = 0.021

Таблица 14

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | | | | | Метод идеальной точки | | | | |
|  | Выбор ПК | Частот а | Цена | ОЗУ | Качест во | разнос ть 1 ^2 | разнос ть 2 ^2 | разнос ть 3 ^2 | Разнос ть по | итог |
| 1 | DEXP AIO-MC | 0.74 | 0.7 | 0.5 | 0.111 | 0.0097 | 0.0257 | 0.0357 | 0 | 0.267 |
| 2 | ASUS V222FAK-  WA047M | 0.448 | 0.56 | 0.25 | 0.333 | 0.0435 | 0.0553 | 0.0804 | 0.021 | **0.448** |
| 3 | MSI PRO  AP241 11M- 642XRU | 0.82 | 0.65 | 0.5 | 0.222 | 0.0046 | 0.0350 | 0.0357 | 0.005 | 0.284 |
| 4 | Acer Veriton  Z4880G | 0.82 | 0.5 | 0.25 | 0.333 | 0.0046 | 0.0714 | 0.0804 | 0.021 | 0.421 |

Теперь, с учётом нового критерия, наилучшей альтернативой будет ASUS V222FAK-WA047M.

# Ещё задания для решения у доски.

2. Выбор помещения для аренды.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Альтернативы | Стоимость аренды, тыс. руб. | Площадь,  м2 | Доступность, 1-10 баллов | Состояние |
| Помещение 1 | 130 | 95 | 9 | хорошее |
| Помещение 2 | 65 | 110 | 5 | плохое |
| Помещение 3 | 80 | 90 | 6 | среднее |
| Помещение 4 | 100 | 100 | 8 | среднее |